ACTUALIDAD DE LAS APORIAS DE ZENON

ALEJANDRO SANVISENS HERREROS

RESUMEN:

Se discuten críticamente las diversas posturas acerca de la divisibilidad del espacio, del tiempo y del movimiento. De dichas posturas depende la solución de las aporías de Zenón.

Se aportan serias pruebas de que ni el espacio ni el tiempo se componen de indivisibles matemáticos y de que el movimiento no se compone de quietudes, reforzando la postura Bergsoniana. También se discute el problema del infinito actual y la lógica del infinito.

SUMMARY:

The diverses postures about the divisibility of the space, the time and the movement are critically discussed. The solution of Zeno's paradoxes depends on the above mentioned postures.

Serious proofs that neither space nor time are compost of mathematical indivisibles and that movement are not compost of quietudes, are adduced, reinforcing the Bergsonian posture. The actual infinite problem and the logic of the infinite are also discussed.

1. VIGENCIAS DE APORIAS

El lógico americano Wesley Salmon ha comparado la multiformidad de las aporías de Zenón a una cebolla. También se podría hablar de una monstruo de varias cabezas que arremete contra el espacio, el tiempo, la lógica, la matemática y la metafísica; que emponzoña toda la cuestión de la infinitud y de la continuidad con el veneno de la contradicción y que intenta poner en conflicto la razón con la experiencia.

Zenón de Elea (490-430 a J.C.) discípulo y «bulldog» de Parménides, era, según Platón, un hombre imponente, íntegro y un tanto orgulloso. Hay cierta discrepancia entre los autores acerca de su pensamiento, aunque no hay duda de que su intención principal era defender a Parménides en su tesis de la unidad del ser.

Zenón se refería al ser físico y le confería, como Parménides al ser mental (conceptual), la unidad, la continuidad y la indivisibilidad: lo mismo que haría Spinoza en el siglo XVII. Las tesis de los eléatas, con todo, desembocaron en la concepción de un mundo suprasensible e inmutable, donde debe situarse el verdadero ser, es decir, el mundo de Platón.

Timón le llama «bífido» y Aristóteles le atribuye la invención del método dialéctico. Toda la temible y famosa fuerza de su intelecto fue lanzada contra los pitagóricos, partidarios de la multiplicidad, la discontinuidad, la divisibilidad hasta la infinito y la mutabilidad. Y también contra los físicos y los atomistas que concedían un divisibilidad finita a los seres en porciones indivisibles o átomos. De hecho Zenón no atacó directamente a la escuela atomista, fundada más tarde, pero sus argumentos la ponen en entredicho, como parece que estableció Meliso.

Según Bergson: «La metafísica nació de los argumentos de Zenón relativos al cambio y al movimiento»[1]. Cabe añadir que sus aporías han sido el acicate para el desarrollo no sólo de la metafísica, sino también de la lógica y de diversas ramas de la matemática y hasta de la física.

Para demostrar su tesis, Zenón organizó todo un «océano de argumentos», en expresión de Platón, contra la pluralidad y discontinuidad y contra la realidad del espacio y el movimiento. De dichos argumentos o aporías (dificultades) tenemos noticia a través de Platón, Simplicio, Aristóteles y de algunos fragmentos (dudosos) del propio Zenón.

Todos sus adversarios quedaron atrapados en ellos al no disponer de los recursos filosóficos introducidos por Aristóteles, ni de los refinamientos matemáticos propios de la edad moderna y contemporánea.

1. BERGSON, H., *La pensée et le mouvant,* Trad, cast. en *Obras escogidas,* México, Aguilar, 1963, p. 1059.

El núcleo de las dificultades ha sido desentrañado, pero no a gusto de todos, ni tampoco la solución ha sido universal, por lo que se hace necesaria una revisión unificadora. Además existe un gran desconocimiento acerca de la profundidad de toda esta problemática. Por ejemplo, respecto al problema de la divisibilidad infinita dice Balmes: «La excesiva confianza en este punto sería un seguro indicio de que no se comprende el estado de la cuestión»[2].

Muchos viven tranquilamente creyendo que tienen explicadas las aporías de Zenón y ni siquiera las han captado. Otros incluso han escrito libros proponiendo alguna solución elemental, a todas luces insuficiente. No se han percatado de que se trata de «juegos serios», como los describe el *Parménides* de Platón. Todavía hoy, algunos aplaudirían la actitud de Antístenes, el cual, no sabiendo cómo rebatir a Zenón, se levantó y se puso a andar. Podemos adivinar la escondida sonrisa de Zenón ante tal claudicación. Ni siquiera los empiristas ven con buena cara esta postura de Antístenes. Zenón ha retado a la razón y ésta debe defenderse sin ayuda de la experiencia.

Por sus adherencias con diversos aspectos de la ciencia moderna, el tema es de gran actualidad y conviene comentarlo con cierta profundidad.

2. BREVE ENUNCIADO DE LAS APORIAS

Para simplificar la cuestión, me limitaré a dar una formulación moderna de las principales aporías.

Primera, de la dicotomía: El móvil no puede iniciar ningún movimiento, pues, para recorrer cierta distancia, primero debe recorrer la mitad, aplicándose iterativamente este principio y llegando a una infinitud de recorridos. Tampoco podría llegar a la meta en el supuesto («absurdo») de que pudiera alcanzar la mitad de la distancia que lo separa de ella, pues encontraría asimismo, en el camino, otras infinitas mitades.

Segunda, de Aquiles y la tortuga: Aquiles, el de los pies ligeros, no puede alcanzar a la tortuga situada uno pasos más adelante. En efecto, para alcanzarla, previamente debe llegar al punto donde está la tortuga al comienzo, tardando un tiempo en ello. En ese tiempo la tortuga habrá avanzado algo, volviendo a situarse por delante de Aquiles. Aplicando iterativamente este argumento, se observa que la tortuga siempre está por delante de Aquiles.

2. BALMES, J., *Filosofía fundamental. Obras completas,* Tomo II, Madrid, B.A.C., 1948, p. 369.

Tercera, de la flecha: En un instante dado indivisible, la flecha móvil debe estar quieta, pues si se moviera dentro del instante, éste sería divisible. Pero si la flecha está quieta en todos los instantes, entonces es imposible que se mueva.

Cuarta, del estadio (versión modificada): Supongamos que en un estadio de juego imaginario, se colocan tres cornetas, tres bastoneras y tres tambores, como en la figura 1a. Al cabo de un instante indivisible de tiempo, las bastoneras se corren un átomo (indivisible) de espacio hacia la derecha y, al mismo tiempo, los tambores se corren un átomo hacia la izquierda, quedando como en la figura 1b

Cornetas	C_1 C_2 C_3	C_1 C_2 C_3
Bastoneras	B_1 B_2 B_3	B_1 B_2 B_3
Tambores	T_1 T_2 T_3	T_1 T_2 T_3
	Fig. 1a	Fig. 1b.

En tal caso, B_2 ha pasado de estar a la izquierda de T_1 a estar a su derecha, sin estar jamás alineado con él, pues el instante es indivisible y la alineación hubiera tenido que ocurrir dentro del instante.

Quinta, de la multiplicidad del espacio: Las últimas partes de que consta el espacio (y el tiempo) son divisibles o indivisibles. Si son divisibles no son las últimas partes, pero si son indivisibles, no tienen extensión, en cuyo caso el espacio está compuesto por la suma de partes inextensas. ¿Cómo puede ser extenso?

3. PROBLEMATICA IMPLICITA EN LOS ARGUMENTOS

El primer problema que subyace a toda esta argumentación es el de si el espacio y el tiempo están formados por indivisibles y de si la infinitud de la divisibilidad del espacio puede ser actual o sólo potencial, o las dos cosas a un mismo tiempo (aporía de la multiplicidad). Se trata del problema de la divisibilidad infinita.

Otro problema, relacionado con el anterior, es el de si el movimiento se compone de quietudes, o si es divisible (Aporía de la flecha).

El argumento Aquiles propone, entre otras cosas, que el todo contiene igual número de elementos que la parte (A cada trayectoria de Aquiles le corresponde una de la tortuga, siendo el camino de la tortuga una parte del camino de Aquiles en el supuesto de que la alcance).

La aporía de la dicotomía plantea, a su vez varios problemas: que una suma de infinitos sumandos puede ser finita; que los móviles deberían poder contar hasta infinito, o, lo que es equivalente: que los móviles realizan infinitas operaciones en su carrera finita.

Las soluciones de las aporías de Zenón dependen de las posturas que se tomen respecto a estos problemas. Estas posturas iniciales han originado apasionadas controversias, como vamos a ver a continuación.

4. LA CUESTION DE LA DIVISIBILIDAD INFINITA

¿Son el espacio y el tiempo infinitamente divisibles?, ¿están infinitamente divididos? ¿Es este infinito actual o potencial? Por raro que parezca, aún en la actualidad se dan tres posturas ante este dilema aparentemente trivial.

4.1. *Primera postura: Divisibilidad infinita actual:*

Según esta postura, el espacio y el tiempo son infinitamente divisibles y están (en acto) infinitamente divididos, de forma que el espacio consta de infinitos puntos y el tiempo de infinitos instantes (indivisibles).

Esta es la postura de los pitagóricos y, curiosamente también la adoptada por los matemáticos Georg Cantor, Julius W.R. Dedekind, Bertrand Russell, Bernard Bolzano, Karl Weierstrass, etc.

Como se ve, esta postura admite la existencia de multitudes (conjuntos) con infinitos elementos ya dados. Se trata del enigmático infinito actual. Un infinito realizado, no en evolución o en curso, sino ya terminado, estático. Todos sus elementos existen simultáneamente. Ninguno de ellos requiere para empezar a existir, la previa aparición de otro.

Santo Tomás de Aquino no considera totalmente repugnante (contradictoria) la existencia de multitudes actualmente infinitas. También admiten el infinito actual autores como Duns Scoto, algunos nominalistas, Nicolás de Cusa, Descartes, Spinoza, Galileo, Cavalieri, etc.

También los filósofos marxistas acogen con entusiasmo la idea de los infinitos actuales. Sin este concepto resulta ilógico afirmar, como hacen, que el mundo es temporalmente infinito.

Sin embargo, hay argumentos contra la infinitud temporal del mundo. En efecto, se observa que no todos los momentos son simultáneos, que unos requieren la previa aparición y desaparición de los otros para entrar en acción. El tiempo es una realización, no es algo ya dado o estático. De ser así todos los tiempos existirían simultáneamente y no debería esperarse a que pasaran todos los anteriores para que apareciera uno dado.

Dándose cuenta de esta contradicción, los marxistas la declaran abiertamente. Dice Askin: «La infinitud ligada al tiempo, infinitud que aparece como contradicción interna, como unidad dialéctica del infinito actual y del infinito potencial,...»[3] Desde luego, el curso del tiempo, para ellos, no sólo es continuo, sino también discontinuo. Lenin afirma: «El movimiento es una unidad de continuidad (del tiempo y del espacio) y de discontinuidad (del tiempo y del espacio). El movimiento es una contradicción, es una unidad de contrarios.»[4]

Cuando aparece una contradicción, lo lógico es abandonar las hipótesis de partida. ¿Puede constar el tiempo de infinitos momentos ya realizados, presentes todos ellos simultáneamente? Es evidente que no son simultáneos, sino sucesivos; por eso los momentos no constituyen una multitud infinita actual. El tiempo no se compone de una infinitud actual de momentos ni, por la misma razón, de instantes. Como luego veremos, la multitud infinita actual de puntos en el espacio y de elementos discretos en un conjunto, también plantea problemas.

Sin embargo, los matemáticos están acostumbrados a tratar todos los días con conjuntos de infinitos elementos que parecen infinitudes actuales. Se ha dado un retorno al pitagorismo y neoplatonismo, según el cual el infinito potencial procede y depende del actual.

Cantor define un conjunto infinito como aquel cuyas partes pueden tener tantos elementos como el todo. El comparar los números de elementos entre conjuntos se basa en la posibilidad de establecer alguna correspondencia biunívoca entre ellos. Esta idea poderosa y fructífera que se remonta a Galileo, pero que desarrolló Cantor magistralmente, no puede dejar de considerarse. Es un hito en la historia de la matemática. Según Ferrater Mora: «El problema del infinito no puede ser ya tratado inteligiblemente si excluimos el problema de la enumerabilidad o no enumerabilidad por parte de un ente enumerante...»[5].

Ahora bien, el matemático Emile Borel ha indicado atinadamente que toda esta cuestión de la enumerabilidad tiene también cabida si consideramos a los infinitos desde un punto de vista potencial. La posibilidad de establecer una relación biunívoca entre dos conjuntos infinitos se basa, precisamente, en su potencialidad, no en su actualidad. Por eso considero mejor la denominación de «potencia transfinita» (la primera que dio Cantor) que la de «cardinal transfinito» (dada después de una correspondencia biunívoca) con el conjunto de los números naturales o con otros conjuntos.

3. ASKIN, I.F., *El problema del tiempo. Su interpretación filosófica,* Montevideo, Ed. Pueblos Unidos, 1968, p. 227.

4. LENIN, V.I., *Obras completas,* t. XXIX, Montevideo, Ed. Pueblos Unidos, 1959, p. 231.

5. FERRATER MORA, J., *Diccionario de Filosofía,* Buenos Aires, Ed. Sudamericana, 3ª ed., 1951, p. 483.

Para que toda esta operatoria sea algo consistente, es necesario explicar cómo puede un conjunto ponerse en correspondencia biunívoca tanto consigo mismo como con un conjunto que lo contenga. Pongamos un ejemplo: un teatro de infinitos asientos alberga a un espectador en cada asiento de forma biunívoca (ni faltan ni sobran asientos), pero en el entreacto todos los espectadores se levantan para ir al lavabo y, a su regreso, el acomodador los redistribuye de tal modo que queda una infinitud de espectadores sin asiento. ¿Cómo es posible una cosa así? Ha de tener arreglo si tiene algún sentido todo esto de las coordinaciones o equivalencias.

David Hilbert halló un ingenioso remedio a esta embarazosa situación. Su ejemplo del hotel infinito es completamente similar al expuesto. Está totalmente lleno, pero aun y así es capaz de albergar no sólo a uno más, sino a toda una infinidad más de nuevos huéspedes. Para conseguirlo sólo es preciso hacer desplazar a todos los huéspedes ya aposentados hacia otras habitaciones de número más elevado. Sin embargo, es muy sospochoso que el truco de Hilbert salga bien o no según como se haga. Si hacemos salir al pasillo a todos los huéspedes simultáneamente y luego hacemos entrar a cada uno a la habitación de orden inmediatamente superior al de la que ocupaban antes, el método funciona; pero si el proceso es secuencial, de forma que cada huésped deba esperar en el pasillo hasta que salga el de la habitación superior, entonces siempre habrá un huésped en el pasillo, prueba inequívoca de que falta una habitación, pues no hay ninguna de vacía.

Esta situación paradójica se resuelve considerando que el primer método trata el infinito como potencial (inacabado), y la operación es una ampliación del hotel. De no ampliarse, todos aumentan en uno su número de habitación, el hotel también aumenta en uno su número de habitaciones. El segundo método, en cambio, trata el infinito como actual (completo y acabado). No intenta ampliar el hotel y por eso el truco no sale bien. Si no hay ampliación, sólo la magia crea una habitación vacía cuando todas están ocupadas. En resumen, el truco de Hilbert sólo tiene sentido cuando consideramos al infinito como potencia (como algo susceptible de crecer indefinidamente).

Hilbert, aunque muy introducido en la matemática Cantoriana, no admite conjuntos infinitos actuales. Así dice: «El infinito no se encuentra realizado en ninguna parte ni existe en la naturaleza»[6].

Una demostración de la inexistencia de conjuntos con un número infinito actual de elementos discretos (es decir de la imposibilidad del

6. Hilbert, D., Cita en Riaza, J.M. *Ciencia moderna y filosofía,* Madrid, B.A.C., 1953, p. 13. (Posiblemente del tratado *Acerca del infinito,* publicado en 1926, o del artículo «Über das Unendliche», *Math. Annalen,* Band, 95, 1925.

infinito físico) es la siguiente: Consideremos (ab absurdum) que exista un conjunto de infinitos elementos discretos en el universo. Es pensable una coordinación entre dichos elementos y los números naturales (a cualquier elemento le corresponde un número natural y a cualquier número natural le está asignado un elemento). Supongamos ahora que introducimos un elemento más (creándolo o produciéndolo). En tal caso, el nuevo conjunto ya no es coordinable con el conjunto de los números naturales. En efecto, a este nuevo elemento no se le puede asignar ningún número natural porque ya están todos asignados, ni cabe hacer el truco de Hilbert, que, como vimos, sólo vale para infinitos potenciales, no para infinitos considerados como actuales. Ahora bien, es absurdo que un conjunto infinito aumente de cardinal con sólo añadirle un elemento más. De hecho esto está en contra de la aritmética Cantoriana.

Bertrand Russell asegura que Tristram Shandy sería capaz al final de su vida infinita, de escribir su propia biografía en la que invierte dos años de trabajo por cada dos días vividos. Con ello pretende solucionar el problema de Aquiles y la tortuga. Mucho me temo, sin embargo, que Tristram Shandy jamás terminará su biografía, porque jamás terminará su vida.

El hecho de que un conjunto infinito no pueda establecer una relación biunívoca con otro, es muy posible que tenga que ver conceptualmente con la existencia de alguna relación con el conjunto de las partes (o subconjuntos) de este otro conjunto. La jerarquía de los transfinitos de Cantor puede tener relación con esto.

Sin embargo, al comparar dos conjuntos infinitos, como el de los números pares y el de los naturales, no los tratamos como ya formados por infinitos elementos, sino considerando sus partes finitas. Así por ejemplo vemos siempre que existen dos números naturales por cada número par y, por tanto decimos que la probabilidad de que al extraer al azar una bola numerada de una caja, ésta sea de número par, es un medio, por grande que sea el número de bolas. Es inoperante decir que en el conjunto infinito actual de todas las bolas posibles, la probabilidad de extraer una con número par sería uno, ya que el cardinal de los números pares es el mismo que el de los naturales. No creo que nadie se tomara en serio esta aserción.

Del mismo modo nadie aceptaría la proposición de que la probabilidad de que, al tomar al azar un punto de un segmento de 100 kilómetros, dicho punto esté dentro de un subsegmento de un kilómetro, sea uno. Más bien todo el mundo pensará que es de una centésima, y las apuestas irán en este sentido. Sin embargo, la consideración del infinito actual nos lleva a otorgar una probabilidad uno a este suceso.

Los matemáticos infinitistas actualistas (llamémosles así) tienen un argumento de peso a favor de su tesis. Es el siguiente: ¿Qué hemos de pensar de la aserción que dice: «Todo conjunto acotado de infinitos puntos tiene siempre un punto de acumulación»? Los analistas lo consideran un axioma que suele conocerse como teorema de Bolzano-Weierstrass. Hay otros teoremas, como los llamados de punto fijo, o los de continuidad, que demuestran la existencia de ciertos puntos, aunque nadie los haya visto ni localizado ni calculado previamente. ¿Acaso no significa esto que la existencia de un punto no requiere ninguna consideración acerca de él y que, por tanto al no tener ningún punto más derecho a la existencia que otro, todos los infinitos puntos existen igual y simultáneamente, en acto?

Este pensamiento platonizante no se sostiene porque el punto cuya existencia se demuestra no es un punto concreto y especificado por el propio teorema. El teorema demuestra la existencia de un punto abstracto como una necesidad relacionada con la definición del conjunto. Por lo demás, lo otros infinitos puntos constituyen un infinito potencial. Es como si dijéramos: ¿Existen todos los infinitos números naturales? ¿Existe el número uno? Dado un número natural, ¿existe su siguiente? Luego existen todos. Esta es una manera de hablar que usa con frecuencia la matemática, pero se obtienen los mismos resultados hablando de otra manera. Es la siguiente: no existe ningún número hasta que no se piensa en él. Podemos pensar en el número uno. Si pensamos en él, entonces existe. Si pensamos en un número natural podemos pensar también en el siguiente. Si lo hacemos, entonces tal siguiente existe. No hay límite en nuestra posibilidad de pensar números, luego no hay límite en la posibilidad de su existencia. Pero ni los pensamos todos, ni, por tanto, existen todos. Son sencillamente infinitos potencialmente.

4.2. *Segunda postura: Divisibilidad infinita potencial:*

Según esta postura el espacio y el tiempo son infinitamente divisibles, pero no están infinitamente divididos. El espacio y el tiempo no contienen infinitos puntos e instantes en un sentido actual, sino sólo en sentido potencial. No existe el infinito actual. El espacio y el tiempo no están compuestos de infinitos indivisibles, aunque en ellos cabe señalar, potencialmente infinitas posiciones. A mi modo de ver esta postura permite una solución completa de todas las aporías de Zenón.

Es la posición de Aristóteles: «Es imposible que un continuo esté formado de indivisibles»[7]; de Anaxágoras: «Tratándose de magnitudes siempre hay otra mayor» «En lo pequeño no existe el más pequeño»[8]; de Kant: «Lo simple, tanto en la sucesión temporal como en el espacio,

7. Aristoles, *Física,* Libro VI, cap 1.

8. Anaxágoras, *Sobre la naturaleza,* cf. trad. de J.D. García Bacca, *Los presocráticos.* II., Fondo de cultura económica, 1ª ed., 1944, p. 95, Punto 3 (variante de la misma frase).

es decididamente imposible»[9]. Kant concibe los puntos y los instantes como meras posiciones o límites, pero, para él, cualquier porción de espacio es para Kant una antinomia que prueba que tanto el espacio como el tiempo no son reales, sino tan sólo formas a priori de la sensibilidad.

Con mucha mayor claridad se expresa Bergson: «Jamás haríais tiempo con parecidos instantes, como tampoco compondríais una línea con puntos matemáticos»[10]

También es la posición de Renouvier, la de Newton y Leibniz, creadores del cálculo infinitesimal, y de los matemáticos llamados constructivistas: Augustin-Louis Cauchy, para quien «todo número es esencialmente finito»; Carl Friedrich Gauss, Henri Poincaré: «No hay infinito actual. Los cantorianos lo han olvidado y han caído en contradicción.»[11] También se refería a la teoría de los números transfinitos como a una «enfermedad»; Leopold Kronecker; Luitzen E.J. Brouwer, para el cual el infinito es la posibilidad de una construcción mental ilimitada; Hermann Weyl, Emile Borel, Henri Lebesgue, Paul Lorenzen, etc.

Ya la filosofía escolástica presentaba argumentos en contra de que el continuo se compone de indivisibles. Hoy, el cálculo de probabilidades viene a confirmar que estaban en lo cierto. En efecto: si una circunferencia constara de infinitos puntos, la probabilidad de que una flecha rotatoria se detuviera señalando un punto dado de dicha circunferencia, sería cero. Se trataría de un suceso imposible. Sin embargo no es imposible. La flecha siempre se detiene señalando un punto. No. La circunferencia no consta de infinitos puntos, sino que los puntos se van creando conforme la flecha, al detenerse, los va señalando. No cabe, pues, hablar aquí de probabilidad, ya que no hay un conjunto de puntos previos que puedan señalarse. La posibilidad potencial de señalar infinitos puntos no indica que existan en acto estos infinitos puntos, sino que no hay limitación en la posibilidad de ir señalando (creando) nuevos puntos (posiciones) dentro de la circunferencia.

4.3. *Tercera postura: Indivisibilidad infinita:*

Según esta postura el espacio y el tiempo no son infinitamente divisibles, sino sólo finitamente divisibles. Constan de un número finito de partes indivisibles, que no son puntos ni instantes, sino fragmentos

9. KANT, Inmanuel, *Nueva crítica de la razón pura,* 1ª sección, B. Trad. de Ed. Sarpe, Madrid, 1984, p. 54.

10. BERGSON, H., Op. cit. p. 10-69.

11. POINCARÉ, H., *Ciencia y método,* Madrid, Espasa Calpe (Col. Austral n. 409), 3ª ed. cast., 1963, p. 150.

mínimos. La divisibilidad finita de la materia se aplica al espacio porque éste sólo tiene existencia en la materia.

Esta es la doctrina de Demócrito y Leucipo y en general de los atomistas griegos.

Encontramos de nuevo algo parecido en Maimónides, en Guillermo de Occam: «Nada hay indivisible en los entes»[12] (refiriéndose a los puntos). En Francis Bacon: «La divisibilidad hasta lo infinito de la línea nos lleva a una confusión semejante que proviene del movimiento sin término del pensamiento»[13].

Hallamos también aquí a otros empiristas: Berkeley: «Si logramos hacer comprender que una extensión finita no puede contener infinito número de partes, o sea, que no es infinitamente divisible, habremos desembarazado la geometría de grandes dificultades y contradicciones.»[14] También Hume niega que el espacio y el tiempo sean infinitamente divisibles. Así dice: «Un número infinito de divisiones reales de tiempo, pasando sucesivamente y acabándose una después de la otra, parece una contradicción tan evidente, que ningún hombre, cuyo razonamiento no estuviera corrompido, en lugar de mejorado, por las ciencias, sería nunca capaz de admitirlo.»[15] Para Hume, el punto matemático es una mera ficción.

La idea atomista en este sentido, ha sido también asumida por los filósofos marxistas. Sin embargo, la formulación rigurosa y empírica de la misma se debe a los desarrollos de la física cuántica.

Alfred N. Whitehead y William James han llegado a la conclusión de que las aporías de Zenón aportan una base racional a la discontinuidad de los fenómenos físicos. Para Whitehead, la divisibilidad infinita sólo se consigue tras el acto de llegar a ser, que es, en sí, indivisible.

Según Raimundo Paniker, el espacio real no es divisible hasta el infinito, puesto que es una entidad física y no matemática. La manifestación cuantitativa del cambio también es discontinua (se habla del átomo de espacio, de $2{,}81.10^{-13}$ cm., y del átomo de tiempo, de $9{,}3.10^{-24}$ seg.)

Por más que la física vaya por este camino, con él no se responde a la íntima exigencia de la razón. Meliso de Samos arrojó los argumentos de Zenón también contra los atomistas. Cada indivisible físico, es di-

12. OCCAM, G. *Principios de teología.* Trad. Madrid, E. Sarpe, 1985, p. 141.

13. BACON, F., *Novum organum,* Trad. Madrid, Ed. Sarpe, 1984, Libro 1º, n. 48, p. 44.

14. BERKELEY, G., *Principios del conocimiento humano,* Trad. Madrid, Ed. Sarpe, 1985, CXXIII, p. 162.

15. HUME, D., *Investigación sobre el entendimiento humano,* 12,2, 125. (También en el *Tratado de la naturaleza humana,* 1, 2, 1-2 se refiere a los mismos).

visible matemáticamente y, si el móvil no desaparece en ningún instante, debe atravesar todo el continuo matemático, y ésta es la dificultad. El que «cuantice» el espacio y el tiempo, primero únicamente lo hace a efectos de medición, no estrictamente reales y, además, la cuantificación del movimiento introduce una especie de milagro en física: la desaparición y reaparición de la materia a intervalos regulares de espacio y de tiempo. No sé hasta qué punto la materia se comporta de esta manera. Lo que sí es probable, y nadie lo ha sugerido, es que la luz se propague así, a saltos. Esta forma saltatoria del movimiento de la luz implicaría una modificación del concepto de velocidad de la luz, porque indicaría que la luz no recorre espacios, lo cual podría dar pie a una explicación de los experimentos de Michelson y Morley, independientemente de la teoría de la relatividad.

5. LA CUESTION DEL MOVIMIENTO

Hay tres formas de entender el movimiento correspondientes a las tres posturas mencionadas en el epígrafe anterior.

5.1. *El movimiento como continuo, divisible hasta el infinito y dividido en infinitas quietudes:*

Los matemáticos conciben así el movimiento, tal como explica Bertrand Russell, como un conjunto infinito de estados. No hay, por decirlo así, un estado de movimiento, o un momento para el movimiento. El movimiento no se da nunca; siempre se está en alguna parte. El movimiento viene expresado por una función matemática del tiempo. Dicha función se representa gráfica y estáticamente por medio de una línea que visualiza el valor de la posición en cada instante. Es una forma útil, pero congelada de concebir el movimiento.

Es falso decir que un móvil está en un punto durante cierto instante de su recorrido, pues el instante carece de duración temporal. Sin tiempo no hay existencia. Ya decía Wells que no existe nada instantáneo.

Tampoco tiene sentido hablar de «pasar por un punto». «Pasar» expresa la idea de estar un cierto tiempo desde que se entra hasta que se sale del lugar por donde se pasa. Pero no se puede entrar en un punto ni salir de él, pues no tiene extensión. Y si estamos en él durante cierto tiempo (de paso), entonces estamos quietos, puesto que no nos desplazamos, al carecer de extensión. «Pasar por», en el sentido de «moverse a través de», es imposible dentro de un punto.

Estar en un punto durante un solo instante, también es imposible, porque un instante no dura nada. Por consiguiente el enunciado de B. Russell es absolutamente incomprensible.

Los matemáticos deberían conformarse con decir: durante el movimiento las cosas ocurren de tal manera que, si detuviéramos al móvil en tal instante, quedaría parado en tal punto. Y la función o ecuación del movimiento, como se la llama, expresa precisamente los valores que tomaría la posición del móvil en caso de que lo detuviéramos en las posiciones variables del tiempo. Se trata de una herramienta indispensable para el cálculo del movimiento, pero no de una forma de entender el movimiento.

El movimiento real no es el movimiento de Weierstrass o de Russell: una colección infinita y no numerable de estados. Nunca podríamos hacer las infinitas fotografías de los infinitos instantes del movimiento, ni siquiera en un número infinito de instantes, por la sencilla razón de que, durante un instante no es posible fotografiar, captar o realizar nada.

Algunos profesionales consiguen obtener fotografías en las cuales, calles muy concurridas aparecen increiblemente vacías. La cámara sólo ha captado las cosas quietas. Se obtienen con un gran período de exposición en películas que se impresionan con la persistencia de un objeto en cierto lugar, pero no si el objeto se mueve de un lado para otro. Esta técnica nos permite ver que el movimiento es incaptable, irreducible a quietudes. Toda fotografía del movimiento es siempre algo borrosa: no es la captación de un instante, sino de un intervalo, y en cada punto del papel confluyen distintas imágenes.

Por otra parte, la indivisibilidad actual del movimiento demuestra la del espacio. Así, por ejemplo, un lápiz va dibujando una línea a medida que se desplaza por el papel. Si la línea fuera un conjunto de puntos dibujados en diversos instantes, no aparecería ninguna línea. El instante no permite ninguna operación de grabado.

Los conceptos «pasar por un punto» y «pasar por un intervalo» (sin partir del reposo), son ambos contradictorios. Del primero ya lo hemos visto. El segundo implica al primero, pues para pasar por un intervalo debe entrarse en él, llegar a él, es decir, llegar a su primer punto (si no se parte del reposo). Si el intervalo es abierto por extremo (en el sentido topológico del término) no tiene un primer punto. Debemos llegar entonces a un punto inmediatamente anterior al intervalo. Si es cerrado hay que llegar a su primer punto, incurriendo en los dos casos en la contradicción de «llegar a» o «pasar por» un punto sin detenerse en él.

Durante el movimiento, a mi modo de ver, el móvil está esencialmente deslocalizado.

5.2. *El movimiento como continuo, pero no compuesto por infinitas quietudes:*

He ahí la concepción Aristotélica y Bergsoniana del movimiento. En la Aristotélica hay un móvil y un movimiento que puede descomponerse infinitamente (potencialmente). En Bergson, el movimiento es algo simple, indivisible y además, aunque aquí no nos interese esta cuestión, no requiere un móvil) se llega a una concepción Heraclitana).

Aristóteles resuelve las aporías de Zenón apelando a que la multitud infinita de espacios en que se divide potencialmente el espacio, se recorrería en una multitud también infinita de tiempos en que se divide potencialmente el tiempo.

Coincide con Bergson en que ni el tiempo ni el espacio se componen de indivisibles y en que en el movimiento no caben detenciones, pero discrepa en que para él caben divisiones. Por eso su solución de la cuestión zenonesca deja en el aire una dificultad: Si el movimiento es potencialmente divisible, el móvil realiza o actualiza un infinito potencial. Recorre infinitas porciones de espacio en infinitas porciones de tiempo. Esta posibilidad de realizar infinitas operaciones es lo que repugna en esta concepción del movimiento.

Por el contrario, Bergson considera al movimiento y al espacio creado por él, como cosa simple, indivisible. Cualquier articulación (o detención) es artificial y destruye la simplicidad del movimiento original. No se adoptan posiciones durante el movimiento.

Cuando se lee a Bergson, se tiene la impresión de que todas las aporías de Zenón están definitivamente resueltas. Sin embargo, como dijimos al comienzo de este artículo, van saliendo nuevas capas de esta problemática cebolla, que nos introducen en progresivas sutilidades que deben ser esclarecidas.

En primer lugar: si bien no es posible pasar por un punto ni por un intervalo, sí es posible dejar una marca en un intervalo (al menos mentalmente). Basta suponer que una punta que se desplaza sobre el papel encuentra a su paso una porción ennegrecida que permite el calco. Ciertamente, tras el movimiento aparecerá una marca de la punta en la superficie que está bajo el trozo de papel de calco. La solución de esta cuestión requiere una consideración acerca del espacio.

El espacio es algo simple. Ya hemos dicho antes que no está compuesto por puntos, y, aunque así fuera, no importaría ahora, porque el concepto de «pasar por un punto» es imposible. Pero, aunque simple, es descomponible en partes (siempre espaciales), y esta descomposición puede hacerse de infinitas maneras. ¿Existen todas las posibles partes del espacio en el espacio entero? No, por cierto. El conjunto de las partes es un mundo platónico que está fuera del espacio que consideramos. Para entenderlo, pensemos en aquel aficionado a la escultura que oyó el consejo de un escultor experto: «Sólo debe quitarse del bloque de mármol, la parte «sobrante» y aparece la estatua escondida dentro». Cuando el aficionado terminó de quitar el «sobrante», se encontró con que no le había quedado nada. No había ninguna estatua ni forma especial ni no especial escondida dentro.

Sería algo preocupante que existieran infinitos subsegmentos en un segmento, pues un móvil, al recorrerlo, podría dejar infinitas marcas (para distinguirlas bastaría que los papeles de calco del experimento anterior fueran alternando de color). Pero no hay que preocuparse: no hay infinitos subsegmentos. Estos se crean con la mente.

Mas, ¡Ay!, ¿Y si alguien montado sobre el móvil, dispusiera de un contador y fuera contando los infinitos subsegmentos que él fuera creando en su mente? El contar requiere tiempo, y los segmentos que se van creando mentalmente con el movimiento siguiendo la pauta de Zenón, cada vez son menores, con lo cual cada vez se dispone de menor tiempo para realizar la misma operación (contar). Así pues, la mente ha de operar con una velocidad potencialmente infinita. Luego es imposible. Además, para solucionar esta cuestión se han creado las máquinas de infinito, como las de Max Black. Una de ellas es la lámpara ideada por el filósofo James Thomson. Esta lámpara se enciende primero en un minuto; luego se apaga en medio minuto; luego se enciende en un cuarto de minuto y así sucesivamente. Evidentemente esta lámpara ha realizado infinitas tareas cuando han pasado dos minutos. Zenón primero reiría con cierta satisfacción, pero su sonrisa se cambiaría en inquietud al preguntársele en qué estado se hallaría la lámpara al cabo de este tiempo. ¿Encendida o apagada? Puede verse fácilmente que de las dos maneras al mismo tiempo. Ello demuestra que no hay máquinas de infinito, pues crean absurdos de esta clase.

Adolf Grünbaum ha propuesto una ulterior y terrible dificultad al imaginar a un segundo Aquiles que corre paralelo al primero y a doble velocidad, pero que, cuando llega a la posición que ocupaba la tortuga al principio, se detiene realmente, esperando al primer Aquiles de movimiento continuo y más lento. Vuelve a ponerse en marcha cuando es alcanzado por éste y vuelve a detenerse al llegar a la posición que ocupaba la tortuga cuando él volvía a ponerse en marcha, y así sucesivamente. Los dos Aquiles alcanzarán a la tortuga al mismo tiempo, pero el segundo habrá realizado un número infinito de tareas en un tiempo finito.

Grünbaum tiene sus propias y complejas soluciones a las aporías de Zenón. Hay que admitir que su propuesta de este segundo Aquiles es extraordinariamente interesante y difícil de resolver. Creo que una posible salida de este escollo es la siguiente: el segundo Aquiles pasa del reposo a una velocidad determinada, cada vez en menos tiempo, con lo cual su aceleración es potencialmente infinita, y, por lo tanto la fuerza necesaria para conseguir su movimiento. Esto es imposible. Por eso el segundo Aquiles es físicamente imposible.

5.3. *El movimiento como discontinuo:*

Esta postura es tan irrebatible como imposible de imaginar. Sin ninguna duda también resuelve las aporías de Zenón, pero a base de introducir el misterio. Tanto en el espacio, como en el tiempo, como en el movimiento, introduce unos vacíos muy difíciles de digerir.

6. OTRAS CUESTIONES MATEMATICAS; LOGICAS Y FISICAS

La más impresionante a primera vista y que no pudo ser resuelta de modo convincente hasta la llegada del cálculo infinitesimal, fue la paradoja de que la suma de un número infinito de sumandos diera una cantidad finita.

Cabe pensar que, potencialmente un segmento es divisible en infinitas partes (mentalmente) y cada una es recorrida (si puede hablarse así, aunque es ilícito después de Bergson) en un tiempo determinado (cada vez menor). Luego el tiempo total es la suma de un número infinito de tiempos. La convergencia de la serie de estos tiempos permite a los matemáticos asegurar que la suma da un resultado finito. Esta admirable constatación indujo a muchos a creer que el problema de Zenón estaba ya resuelto de esta manera.

Lo que estas series convergentes hacen es definir un cierto número real, pero permanece el misterio de cómo llegar hasta él si hay que pasar a través de la serie infinita, que es la auténtica aporía. Es útil considerar aquí que un móvil que fuera cada vez más lento, siguiendo la pauta de Zenón (permitiendo a un contador montado sobre él, contar a velocidad constante), nunca llegaría al final de su corta trayectoria, pues requeriría un tiempo infinito.

Otra cuestión que procede del argumento Aquiles es la de que el todo tiene tantos elementos como la parte. A cada posición de Aquiles les corresponde una de la tortuga. Así definen el infinito los cantorianos. Ya hemos visto que esta cuestión es espinosa, pero las espinas desaparecen si el espacio, el tiempo y el movimiento se consideran como cosas simples.

Entre los autores que han «resuelto» las cuestiones de Zenón, no faltan los que requieren el auxilio de la teoría de la relatividad, con su concepto de simultaneidad. Creo que es exagerado. Tampoco faltan los que aseguran que son falsos problemas, que se resuelven mediante un recurso a criterios puramente lógicos: Zenón, dicen, admite (concede) el movimiento en el propio argumento en que lo rechaza. Pero Zenón tiene derecho a utilizar la demostración ab absurdum de sus tesis.

Otro intento de solución lógica de las aporías de Zenón consiste en considerar que un razonamiento o argumento que es válido si se aplica un número finito de veces, pierde su validez cuando se aplica infinitas veces. Con esta aserción Darío Maravall exorcisa el «siempre adelante» del argumento Aquiles.

Ciertamente, una operación o un algoritmo aplicado infinitas veces puede dar un resultado diferente de cuando se aplica un número finito de veces. Hay ejemplos de ello en el cálculo infinitesimal. También podría ser cierto que una colección infinita de inferencias de las cuales cada una depende de la anterior, puede dar lugar a algún engaño. Así, por ejemplo, Maravall se refiere a la creencia de Brouwer de que, precisamente por esto no es válido el principio del tercero excluido para los conjuntos infinitos. También Poincaré en su libro *Ultimos pensamientos* se refiere a esta cuestión y la resuelve diciendo que existen dos tipos de clasificaciones: «las predicativas, que no pueden ser trastornadas por la introducción de nuevos elementos, y las no predicativas, que la introducción de nuevos elementos obliga a retocar incesantemente»[16]. No hay problema con las clasificaciones predicativas.

Por su parte, los matemáticos formalistas como Hilbert, demuestran que el principio del tercero excluido puede emplearse también en los conjuntos infinitos, sin conducir a contradicción.

A mi modo de ver, la lógica de una proposición nunca se deteriora por más veces que se repita. En todo caso, si se trata de una cuestión de clasificación, hay que asegurarse de que sea predicativa. En su libro *La ciencia y la hipótesis,* Poincaré señala que la regla del razonamiento por recurrencia (principio de inducción completa), inaccesible a la demostración analítica y a la experiencia, es el verdadero tipo de juicio sintético a priori y se impone necesariamente al espíritu. Sea como sea, gran parte de la matemática se fundamenta en el principio de inducción completa, que no es más que un encadenamiento infinito de silogismos.

Pienso que, para solucionar las aporías de Zenón, hay que adoptar el criterio bergsoniano.

16. POINCARÉ, H., *Ultimos pensamientos,* Trad, Madrid, Espasa-Calpe, Col. Austral n. 579, 1946, p. 78.